

УДК 541.64:539.3

## ВЯЗКОУПРУГИЕ ОРИЕНТАЦИОННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТАХ

© 2002 г. А. В. Мотавкин, Е. М. Покровский

Государственный научный центр Российской Федерации  
“Научно-исследовательский физико-химический институт им. Л.Я. Карпова”  
103064 Москва, ул. Воронцово поле, 10

Поступила в редакцию 30.01.2001 г.

Принята в печать 07.05.2001 г.

Приведены результаты экспериментальных исследований вязкоупругих свойств фенолоформальдегидной полимерной матрицы и композиционных материалов на ее основе, армированных короткими стекловолокнами при различной степени ориентации волокон – от полной неупорядоченности до строгой ориентации как в направлении ориентации, так и в перпендикулярном направлении. По результатам экспериментов найдены интегральные вязкоупругие операторы тензора податливостей. С их помощью построены определяющие физические соотношения для полимерного композита, полагая его ортотропным телом. На этом основании методом интегральных преобразований Лапласа решена задача об определении ориентационных напряжений и деформаций в пластине с неоднородным распределением тензора ориентации, обусловленного несимметричным течением в процессе формования вдоль одной из осей симметрии. Полученные теоретические результаты для модельного тела удовлетворительно согласуются с экспериментом.

### ВВЕДЕНИЕ

Анализ ориентационных напряжений и деформаций в полимерных композиционных материалах (КМ) в упругой постановке не позволяет учесть изменение температуры во времени и релаксационные процессы, характерные для КМ.

Однако упругое решение необходимо, поскольку, во-первых, оно позволяет дать приближенную оценку ориентационных напряжений и деформаций; во-вторых, оно является начальным этапом решения вязкоупругой задачи. Если КМ представить линейными вязкоупругими материалами, то в этом случае, заменяя упругие константы вязкоупругими операторами и применяя обратное интегральное преобразование Лапласа, получают вязкоупругое решение [1].

Если исследуемые КМ не обладают строго линейными вязкоупругими свойствами, их приближенно принимают таковыми.

Основой решения рассматриваемой проблемы является подробное изучение вязкоупругих свойств исследуемых КМ и построение для них физических определяющих уравнений.

### ВЯЗКОУПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КМ С УПОРЯДОЧЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Механическое поведение рассматриваемых КМ в существенной степени зависит от их армирования, поэтому в сравнительно узком диапазоне эксплуатационных температур, особенно для композитов на основе термореактивных полимерных матриц, можно ограничиться анализом только мгновенно упругих и вязкоупругих деформаций.

В качестве модельного КМ был принят композит на основе фенолоформальдегидной матрицы и стеклоармирующих элементов длиной 10 мм и приведенным диаметром 0.2–0.3 мм с объемной концентрацией  $C_0 = 0.43$  и различной степенью ориентации  $S$ . Исследования проводили при одноосном растяжении и простом сдвиге на образцах из композита и матричного материала при 293, 353 и 413 К. По результатам исследований на ползучесть построены кривые податливостей  $I = \epsilon/\sigma$  при растяжении и простом сдвиге. Податливости, соответствующие разным напряжениям, находятся в пределах 95% доверительного интервала.

Сопоставление кривых податливостей в случае одноосного растяжения и сдвига при нормальной

температуре для композиционного и соответствующего матричного материала показывает, что в первом приближении их можно считать подобными, т.е. отличающимися лишь постоянным множителем  $I_m \approx mI_k$ , где индексы  $m$  и  $k$  обозначают соответственно матрицу и композит.

Это позволяет множитель  $m$  оценить приближенно, исходя из упругого решения задачи об определении податливости хаотически армированного композита. Рассчитанная таким образом величина  $m = 3.21$  удовлетворительно соответствует экспериментальному значению  $m = 3.17 \pm 0.14$ . Для других объемных концентраций  $C_0'$  показатель  $m' = m[I_k(C_0)/I_k(C_0')]$ . Такой характер изменения податливостей свидетельствует о преобладающем вкладе матрицы в вязкоупругие свойства композита. Это согласуется с экспериментальными результатами (рис. 1), где относительная податливость  $\varphi(t) = I(t)/I(0)$  практически не зависит или мало зависит от структуры армирующего наполнителя. Только для однонаправленной структуры ( $S = 1$ ) наблюдается заметное уменьшение податливости в направлении ориентации по сравнению с перпендикулярным направлением.

Для количественного описания вязкоупругих свойств использована модель [2] с дискретным набором реологических параметров, которую для ползучести можно представить как

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^N I_{\infty i} (1 - e^{-t/\theta_i}) \quad (1)$$

Число дискретных значений времен релаксации выбирается в зависимости от точности аппроксимации. Анализ показал, что достаточно сохранить два слагаемых. Три параметра  $I_0$ ,  $I_{\infty}$  и  $\theta$  для частично ориентированной структуры композита зависят от температуры  $T$  и степени ориентации  $S$  армирующих волокон. Аппроксимация экспериментальных данных позволяет прийти к следующему уравнению для  $I$ :

$$I = (A_1 + B_1 T + C_1 S) + (A_2 + B_2 T + C_2 S) \left( 1 - e^{-\frac{t}{A_3 + B_3 T + C_3 S}} \right) \quad (2)$$

где коэффициенты регрессии  $A_p$ ,  $B_p$  и  $C_p$  ( $p = 1, 2, 3$ ) – зависят от направления ориентации. Для прогнозирования вязкоупругих свойств в более широком временном интервале использовали температурно-временную аналогию. Регрессионное уравнение для коэффициента приведения  $a_T$  представляли

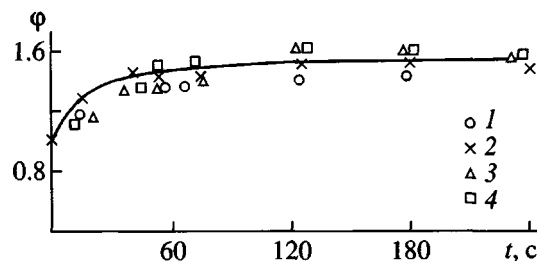


Рис. 1. Изменение функции  $\varphi(t) = I(t)/I(0)$  для модельных композитов со степенью ориентации  $S = 1$  (1, 4), 0 (2) и 0.25 (3). 1 – в направлении ориентации; 3, 4 – в перпендикулярном направлении.

в виде полинома  $\ln a_T = \sum_{j=1}^n C_j (T - T_0)^j$ , и для вычисления коэффициентов  $C_j$ , также зависящих от направления ориентации, использовали метод наименьших квадратов. Применяя указанные аппроксимации, кривые податливости приближенно можно оценить с помощью функции

$$\varphi(t) = I(t)/I(0) = I(t)/I_0 = 1 + \varphi(\infty)(1 - e^{-t/\theta}),$$

где  $\varphi(\infty) = I_{\infty}/I_0$  (для исследуемых композитов  $\varphi(\infty) \approx 1$ ,  $\theta \approx 15 \times 60$  с), и соответствующих упругих констант [3].

### ВЯЗКОУПРУГИЕ ОРИЕНТАЦИОННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

#### Определяющие физические уравнения

Принимая в каждой выделенной зоне тела тензор ориентации  $S_{ij}$  [3] постоянным и полагая КМ с упорядоченной структурой ортотропным, запишем физические соотношения между напряжениями  $\sigma_{ij}$  и деформациями  $\epsilon_{ij}$  (ось  $x_1$  совпадает с направлением ориентации) в плоскости армирования в следующем виде:

$$\epsilon_{ij}(t) + \tilde{U}_{ij(s)} \delta_{ij} \Delta T(t) = \int_0^t a_{ijkl(s)}(t - \tau) d\sigma_{kl}(\tau), \quad (3)$$

( $i, j, k, l = 1, 2$ )

Здесь  $\tilde{U}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) – компоненты тензора усадок; усадку принимаем положительной,  $\delta_{ij}$  – единичный тензор,  $\Delta T = T - T_0$ ,  $a_{ijkl(s)}(t)$  – тензор функций ползучести КМ со степенью ориентации  $S$  в направлении оси  $x_1$ .

Исходя из изложенного, имеем

$$a_{iiii(s)}(t - \tau) = I_{0(s)}^i + I_{\infty(s)}^i (1 - e^{-(t-\tau)/\theta(s)}), \quad (4)$$

( $i = 1, 2$ )

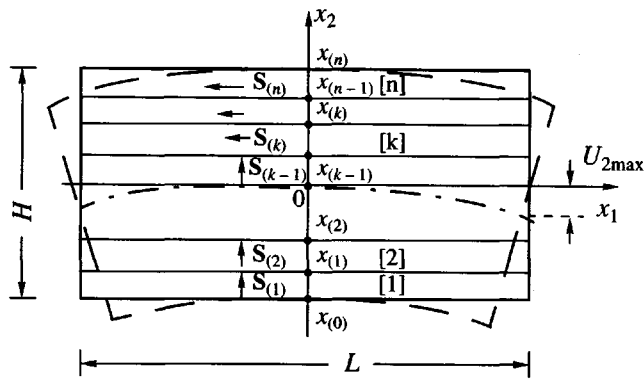


Рис. 2. Модельная пластина с указанием осей координат, размеров и выделенных зон с постоянным вектором  $S_{[k]}$  главного значения тензора ориентации. Штриховыми линиями показано деформированное состояние.

Здесь  $a_{1212(s)}(t - \tau)$  принимали в виде  $a_{1212(s)}(t - \tau) \approx 2^{-1}(1/G_{12(s)}(0))\varphi(t - \tau)$ , а  $G_{12(s)}(\theta) = \sum_{(r)} G_{12(r)}(0)S_{(r)}(r) = 1, 2; (r) = 1$  однонаправленная структура ( $S = 1$ ), ( $r = 2$ ) – хаотическая ( $S = 0$ ) и  $S_{(1)} = S, S_{(2)} = 1 - S$ ;  $a_{1122(s)}(t - \tau) \approx a_{1122(s)}(0)\varphi(t - \tau)$ . Упругую податливость  $a_{1122(s)}(0)$  определяли, как предложено в работе [3].

В заключение рассмотрим необходимые для дальнейшего анализа физические соотношения анизотропной вязкоупругости для ортотропного тела в плоскости армирования, полученные обращением равенств (3)

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t c_{ijkl(s)}(t - \tau) d[\varepsilon_{kl}(\tau) - \tilde{U}_{kl(s)} \delta_{kl} \Delta T(\tau)], \quad (5)$$

где  $c_{ijkl(s)}$  – тензор функций релаксаций. Введем обозначение  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(t) - \tilde{U}_{ij(s)} \delta_{ij} \Delta T(t)$ . Тогда, применяя преобразование Лапласа

$$f^*(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (6)$$

выражения (3) и (5) можно представить в виде

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^* = p a_{ijkl(s)}^*(p) \sigma_{kl}^*, \quad \sigma_{il}^* = p c_{ijkl(s)}^*(p) \tilde{\varepsilon}_{kl}^* \quad (7)$$

Для одномерного случая ( $i = j = k = l = 1$ ), используемого далее, будет

$$c_{1111(s)}^*(p) = (1/I_0^1)(p + \bar{\alpha}_1)p^{-1}(p + \bar{\alpha}_1 + \beta_1)^{-1}, \quad (8)$$

где  $\bar{\alpha}_1 = 1/\theta^1, \beta = I_{\infty}^1/\theta^1 I_0^1$ . Обращая равенство (8), получим

$$c_{1111(s)}(t) = (1/I_0^1)[(1 + I_{\infty}^1/I_0^1)^{-1} + (1 + I_0^1/I_{\infty}^1)^{-1} e^{-(1 + I_{\infty}^1/I_0^1)t/\theta^1}] \quad (9)$$

и соответствующее ядро релаксации

$$\tilde{c}_{1111(s)}(t) = dc_{1111(s)}(t)/dt = -I_{\infty}^1/((I_0^1)^2 \theta^1) e^{-(1 + I_{\infty}^1/I_0^1)t/\theta^1} \quad (10)$$

## НЕСИММЕТРИЧНОЕ ФОРМОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

### Ориентационные деформации

В качестве модельного тела рассмотрим прямоугольную пластину постоянной толщины  $h$  длиной  $L$  и высотой  $H$  (рис. 2). Поле тензора ориентации  $S_{ij}$  зададим исходя из исследуемого несимметричного формования пластины, полагая, что течение происходит вдоль оси  $x_2$  от нижней зоны пластины к верхней. Выделим в пластине  $n$  зон, в пределах каждой из которых тензор  $S_{ij}$ , задающий упорядоченность структуры, является постоянным.

В работе [3] было показано, что в двумерном случае тензору ориентации  $S_{ij}$  каждой точке КМ соответствует вектор  $S_1$  в направлении ориентации с модулем  $S$ . В дальнейшем для характеристики поля тензора ориентации будем использовать вектор  $S_1$ , совпадающий с направлением ориентации в каждой  $[k]$ -й зоне, опуская индекс "1" и снабжая его индексом  $[k]$ .

Из анализа процесса деформирования такой пластины методом формования в твердом состоянии или компрессионного формования при ее заполнении материалом из нижней зоны следует, что направление ориентации совпадает с осью  $x_2$  (в нижних зонах) с постепенным уменьшением абсолютного значения степени ориентации  $S$  и изменением направления ориентации в верхних зонах, в которых оно совпадает с осью  $x_1$  (рис. 2).

В результате такой неоднородной упорядоченности структуры по направлению и степени ориентации усадка в направлении оси  $x_1$  в верхних зонах будет значительно меньше, чем в нижних. Ориентационные напряжения в верхних зонах сжимающие, а в нижних – растягивающие, что приводит к деформации пластины в плоскости  $x_1 - x_2$ , как показано штриховыми линиями на рис. 2. Кроме того, сжатые верхние зоны могут потерять устойчивость и произойдет их выпучивание в направлении, перпендикулярном плоскости  $x_1 - x_2$ . Этот случай для симметричного формования рассмот-

рен в работе [3]. Далее предполагаем, что температура однородного температурного поля пластины (считая ее толщину  $h$  малой) изменяется от  $T_0$  до  $T_k$  по закону  $T = (T_0 - T_k)e^{-\gamma_0 t} + T_k = \Delta T e^{-\gamma_0 t} + T_k$ . Тогда компоненты тензора  $\tilde{U}_{ii}(t) = \tilde{U}_{ii}(0)\Delta T$  в зависимости от времени будут изменяться как

$$\tilde{U}_{ii}(t) = \tilde{U}_{ii}(0)\Delta T(1 - e^{-\gamma_0 t}), \quad (i = 1, 2). \quad (11)$$

Функцию  $\tilde{U}_{ii}(0)\Delta T$  определяем как описано в работе [3].

В дальнейшем, учитывая, что распределение ориентационных напряжений и деформаций в рассматриваемой задаче является одномерным и зависит только от координаты  $x_2$ , будем вместо  $\tilde{U}_{ii}$  и модуля упругости  $E_{iiii}$  писать  $\tilde{U}_{1[k]}$  и  $E_{1[k]}$ , где  $[k] = 1, 2, \dots, n$  – номер выделенной зоны.

В рассматриваемом случае для оценки ориентационных напряжений и деформаций можно воспользоваться известным уравнением упругой линии  $U_2 = f(x_1)$  ( $U_2$  – перемещение упругой линии в направлении  $x_2$ ) в виде

$$[1 + (dU_2/dx_1)^2]^{-3/2} d^2 U_2/dx_1^2 = -\epsilon_0(2/H) \quad (12)$$

Пренебрегая величиной  $d^2 U_2/dx_1^2$  по сравнению с единицей и полагая  $dU_2/dx_1 = 0$ ,  $U_2 = 0$  при  $x_1 = 0$ , можно найти, что  $U_{2\max} = 4^{-1}H^{-1}L^2\epsilon_0$ , где величину деформации  $\epsilon_0$ , соответствующую координате  $x_2 = H/2$ , определяем из условия равенства нулю результирующего момента от усилий, распределенных по координате  $x_2$  [4]

$$\epsilon_0 = (H/2) \int_{-H/2}^{H/2} \tilde{U}_1(x_2)E_1(x_2)x_2 dx_2 / \int_{-H/2}^{H/2} E_1(x_2)x_2^2 dx_2, \quad (13)$$

где  $E_1(x_2)$  и  $\tilde{U}_1(x_2)$  – компоненты тензора модулей упругости и усадок в направлении оси  $x_1$  как функции координаты  $x_2$ . Заменяя в выражении (13)  $E_1(x_2)$  соответствующими интегральными операторами из формулы (5) (с учетом изменения осей ориентации по зонам), а  $\tilde{U}_1(x_2)$  равенством (11), используем интегральное преобразование Лапласа (6) в равенстве (13). Обозначив через  $\Phi_k(p, \beta_{[k]}, \bar{\alpha}_{[k]}) =$

$= 1 - \beta_{[k]}/(p + \beta_{[k]} + \bar{\alpha}_{[k]})$ , получим следующее выражение для изображения  $\epsilon_0^*(p)$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_0^*(p) &= \\ &= U_{1(n)}\Delta T \frac{\gamma_0}{p(p + \gamma_0)} \frac{2^{-1} \sum_{k=1}^n \Phi_k(p, \beta_{[k]}, \bar{\alpha}_{[k]}) a_{[k]}}{\sum_{k=1}^n \Phi_k(p, \beta_{[k]}, \bar{\alpha}_{[k]}) b_{[k]}} \quad (14) \end{aligned}$$

(коэффициенты  $a_{[k]}$  и  $b_{[k]}$  являются безразмерными функциями координат выделенных зон, упругих констант и усадок). После разложения уравнения (14) на элементарные дроби обратным преобразованием Лапласа, найдем

$$\epsilon_0(t) = \tilde{U}_{1(n)}\Delta T\gamma_0 \sum_{j=1}^{n+1} (A_j/q_j)(1 - e^{-q_j t}), \quad (15)$$

где  $q_j$  – корни знаменателя формулы (14). Таким образом, окончательное выражение для  $U_{2\max}$  имеет вид

$$U_{2\max} = 4^{-1}H^{-1}L^2\tilde{U}_{1(n)}\Delta T\gamma_0 \sum_{j=1}^{n+1} (A_j/q_j)(1 - e^{-q_j t}), \quad (16)$$

и предельное значение при  $t \rightarrow \infty$  равно

$$U_{2\max}(\infty) = 4^{-1}H^{-1}L^2\tilde{U}_{1(n)}\Delta T\gamma_0 \sum_{j=1}^{n+1} (A_j/q_j) \quad (17)$$

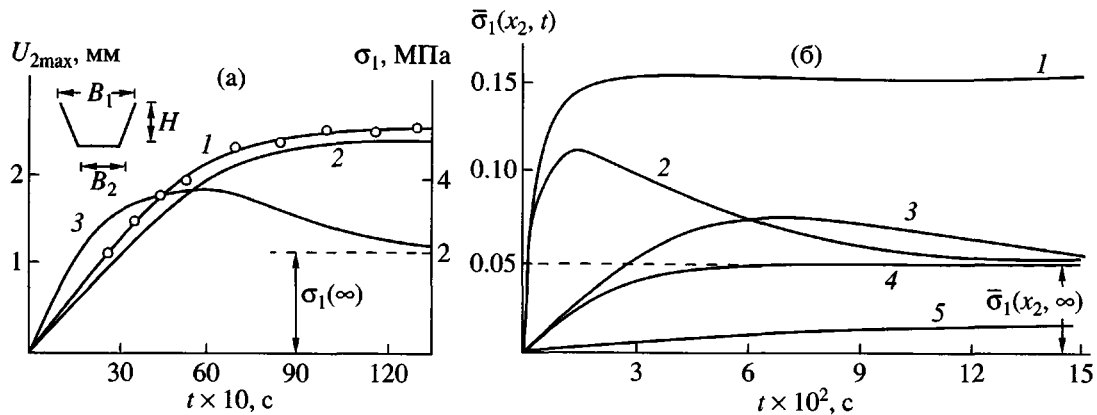
### Ориентационные напряжения

Для упругого решения поставленной задачи в этом случае можно воспользоваться выражением [4]

$$\sigma_1(x_2) = E_1(x_2)[\tilde{U}_1(x_2) + \beta_0 + \epsilon_0 x_2] \quad (18)$$

Здесь  $\beta_0 = \int_{-H/2}^{H/2} \tilde{U}_1(x_2)E_1(x_2)dx_2 / \int_{-H/2}^{H/2} E_1(x_2)dx_2$ , а  $\epsilon_0$  определяется равенством (13). Вычисление напряжения  $\sigma_1(x_2, t)$  проводили в два этапа. На первом этапе вычисляли  $\tilde{U}_1^*(x_2, p)$ ,  $\beta_0^*(p)$  и  $\epsilon_0^*(p)$ . Далее указанным выше способом проводили оценку деформации

$$\epsilon_1(x_2, t) = \tilde{U}_1(x_2, t) + \beta_0(t) + \epsilon_0(t)x_2 \quad (19)$$



**Рис. 3.** Изменение  $U_{2\max}$  модельного тела во времени  $t$  (а) и изменение  $\bar{\sigma}_1(x_2, t)$  для пластины с двумя зонами, различающимися направлением ориентации (б). а: 1 – эксперимент, 2 – расчет, 3 – теоретическое изменение ориентационных напряжений  $\sigma_1(x_2)$  во времени;  $H = l/20$ ,  $B_1 = l/6$ ,  $B_2 = l/18$ ,  $l = 1300$  мм; б:  $\chi = 100$ ,  $\alpha = 0.015$  (1);  $\chi = 10$ ,  $\alpha = 0.15$  (2);  $\chi = 1$ ,  $\alpha = 0.15$  (3);  $\chi = 0.2$ ,  $\alpha = 2.5$  (4);  $\chi = 0.1$ ,  $\alpha = 1.5$  (5); значения  $\alpha$  даны в  $\text{с}^{-1}$  (все  $\alpha$  увеличены в 60 раз).  $\vartheta = 1/2$ ;  $\lambda = 2/3$ ;  $q_1 = 1/1.4$ ;  $q_2 = 1.2$ ; все расчеты проводили при  $x_2 = -1$ .

и затем прямым интегрированием вычисляли напряжение  $\sigma_1(x_2, t)$

$$\sigma_1(x_2, t) = (1/I_0^1)\varepsilon_1(x_2, t) - (1/I_0^1\vartheta^1)(I_\infty^1/I_0^1) \int_0^t e^{-(1+I_\infty^1/I_0^1)(t-\tau)/\vartheta^1} \varepsilon_1(x_2, \tau) d\tau \quad (20)$$

Все ранее изложенные рассуждения можно перенести на случай переменной толщины  $h(x_2)$ .

Теоретические вычисления проводили для тела длиной  $L = 1300$  мм и поперечным сечением, показанным на рис. 3а. В силу симметрии длину пути течения измеряли от середины нижней зоны сечения до верхней кромки и разбивали на три зоны с соотношением длины 0.3, 0.2, 0.5, в которых степени ориентации соответственно были равны 0.1, 0,  $-0.1$ . В зоне у верхней кромки, как следует из изложенного выше, степень ориентации отрицательна, так как в этой зоне ориентация КМ происходила в направлении, перпендикулярном течению. На этом же рисунке показаны вычисленные (кривая 2) и экспериментальные (кривая 1) значения  $U_{2\max}(t)$ , достаточно близко совпадающие между собой. Кривая 3 – теоретическая зависимость, вычисленная прямым методом без использования интегральных преобразований. Из анализа полученных кривых видно, что процесс изменения  $U_{2\max}(t)$  завершается в основном в течение первых 15 мин, а предельная величина находится в диапазоне 2.4–2.8 мм.

Для упрощения анализа ориентационных напряжений рассмотрим пластину с двумя зонами, симметричными относительно оси симметрии при тех же допущениях. Тогда, используя зависимости (18)–(20), с учетом выражения (11), можем получить следующее выражение для  $\sigma_1(x_2, t)$ :

$$\sigma_1(x_2, t) = \sigma_1^* \left( \tilde{U}_1^*(x_2) - \psi_1 - \frac{3}{2} \psi_2 \bar{x}_2 \right) \left[ 1 - e^{-\gamma_0 t} + \vartheta (1 - e^{-\gamma_0 t})^2 - \frac{3}{2} \lambda (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{2\lambda}{1-\chi} (e^{-\alpha \chi t} - e^{-\alpha t}) - \frac{\lambda}{2(1-2\chi)} (e^{-2\alpha \chi t} - e^{-\alpha t}) \right], \quad (21)$$

где  $\sigma_1^*(x_2) = E_1(-H/2, 0) \tilde{U}_1(-H/2, \infty)$ ,  $\lambda = \beta/\alpha$ ,  $\chi = \gamma_0/\alpha$ ,  $\vartheta = (I_0(0)/I_0(\infty)) - 1$ ,  $I_0(0)$  и  $I_0(\infty)$  соответствуют податливостям  $I_0$  при температуре  $T = T_0$  ( $t_0 = 0$ ) и при температуре  $T = T_k \ll T_0$  ( $t_k = \infty$ );  $\psi_1 = (q_1 q_2 + 1)(1 + q_2)^{-1}$ ;  $\psi_2 = (q_1 q_2 - 1)(1 + q_2)^{-1}$ ,  $\alpha = (1 + I_\infty/I_0)\vartheta^{-1}$ ,  $q_1 = \tilde{U}_1(H/2, \infty)/\tilde{U}_1(-H/2, \infty)$ ;  $q_2 = E_1(H/2)/E_1(-H/2)$ ,  $\tilde{U}^*(x_2) = \tilde{U}_1(x_2, \infty)/\tilde{U}_1(-H/2, \infty)$ ,  $\bar{x}_2 = 2x_2/H$ .

При выводе выражения (21) предполагали, что параметры  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\vartheta$ ,  $\chi$ ,  $q_1$  и  $q_2$  не зависят от координаты  $x_2$  и температуры. Наибольший интерес представляет случай, когда темпы релаксации напряжений и нарастания усадки близки, что соответствует параметру  $\chi \rightarrow 1$ . Тогда предельным переходом из

выражения (21) будем иметь для относительного изменения напряжения  $\bar{\sigma}_1(x_2, t) = \sigma_1(x_2, t)/\sigma_1^*$ :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1(x_2, t) = & (\tilde{U}_1^*(x_2) - \psi_1 - (3/2)\psi_2\bar{x}_2) \times \\ & \times [((3/2)(1 - \lambda) - (1/2)(1 + \lambda)e^{-\gamma_0 t}) \times \\ & \times (1 - e^{-\gamma_0 t}) + 2\beta t e^{-\gamma_0 t}] \quad (22) \\ & \text{при } \vartheta = 1/2, \end{aligned}$$

которое достигает максимального значения (рис. 3б, кривая 3) при времени  $t^*$ , определяемом из итерационного процесса

$$t^{(z+1)} = (2\lambda\gamma_0)^{-1} [(1 + 2\vartheta + \lambda) - (2\vartheta + 1)e^{-\gamma_0 t^{(z)}}], \quad (23)$$

$(z = 0, 1, 2, \dots, n)$

и при  $t \rightarrow \infty$  стремится к равновесному значению  $\bar{\sigma}_1(x_2, \infty) = (U_1^*(x_2) - \psi_1 - (3/2)\psi_2\bar{x}_2)(1 + \vartheta - (3/2)\lambda)$ . При упругом решении равновесное значение  $\bar{\sigma}_1(x_2, \infty) = (\tilde{U}_1^*(x_2) - \psi_1 - (3/2)\psi_2\bar{x}_2)(1 + \vartheta)$ , которое для рассматриваемых КМ в  $\sim 3$  раза превышает равновесное значение, полученное с учетом релаксации напряжений (рис. 3б, кривая 1). Из анализа показанных на рис. 3 зависимостей  $\bar{\sigma}_1(x_2, t)$  для различных  $\chi$  и  $\alpha$  можно увидеть, что при быстром охлаждении  $\chi \gg 1$  и  $\alpha = \text{const}$  (рис. 3б, кривая 2) величина максимального напряжения может более чем в 2 раза превысить равновесное значение. При этом его величина соответствует времени

$$t^* \approx -\gamma_0^{-1} \ln [1 - \sqrt{4^{-1}(1 + 1/2\vartheta)^2 - (3\lambda/2\chi)(1 + 2\vartheta)^{-1}}], \quad (24)$$

которое при характерных для рассматриваемых КМ  $\lambda = 2/3$  и  $\vartheta = 1/2$  приводит к выражению  $t^* \approx \alpha^{-1}\chi^{-1} \ln 2\chi$ . Видно, что при  $\chi \rightarrow \infty$ , т.е. при мгновенном охлаждении, величина  $t^* \rightarrow 0$ . Таким образом, ориентационные напряжения мгновенно достигают упругих значений, а далее происходит их релаксация до равновесного значения  $\bar{\sigma}_1(x_2, \infty)$ . При этом величина ориентационных деформаций соответствует упругому решению и со временем практически не изменяется. В случае  $\chi \gg 1$  при  $\alpha \ll 1$  ( $\gamma_0 = \alpha\chi = \text{const}$ )  $t^* \approx \gamma_0^{-1} \ln 2\chi$  и  $t^*$  неограниченно возрастает при  $\chi \rightarrow \infty$ , т.е. максимум ориентационных напряжений достигается при  $t \rightarrow \infty$  и равновесное значение  $\bar{\sigma}_1(x_2, \infty)$  равно упругому значению (рис. 3б, кривая 1). При медленном охлаждении  $\chi \ll 1$  и  $\alpha \gg 1$  ( $\alpha\chi = \gamma_0 = \text{const}$ ) происходит монотонное нарастание ориентационных напряжений от нуля до равновесного значения  $\bar{\sigma}(x_2, \infty)$  (рис. 3, кривые 4 и 5). Для пластины до-

статочно большой толщины температурное поле неоднородно, поэтому, в зависимости от координаты  $x_3$ , перпендикулярной плоскости  $x_1-x_2$ , изменение ориентационных напряжений соответствует разным кривым, показанным на рис. 3б, которые для некоторых моментов времени могут отличаться в несколько раз. В итоге возможны дополнительные деформации в плоскости  $x_3-x_1$  или плоскости  $x_3-x_2$ , особенно при одностороннем охлаждении.

Результаты расчета изменения ориентационных напряжений вблизи нижней границы тела (рис. 3а), для которого экспериментально определили кривую изменения прогиба  $U_{2\text{max}}(t)$  (рис. 3а, кривая 1), показаны на том же рисунке. Из него видно, что полученная кривая соответствует  $\chi = 1$ . Действительно, в этом случае  $\gamma_0 = 0.15 \times 60^{-1} \text{ с}^{-1}$  и  $\sigma_{1\text{max}} = 3.6 \text{ МПа}$ , что существенно превышает равновесное значение  $\sigma_1(\infty) = 2.25 \text{ МПа}$ .

Времени достижения максимального напряжения примерно соответствует время завершения процесса деформирования, после чего скорость процесса резко замедляется, так как увеличилась жесткость КМ, и дальнейшая релаксация ориентационных напряжений происходит практически в режиме постоянной деформации.

Сопоставление упругих и вязкоупругих ориентационных напряжений (рис. 3б) показывает, что упругое решение может давать существенное (до 3 раз) завышение ориентационных напряжений. Однако, в зависимости от режима охлаждения, максимальные вязкоупругие значения напряжений могут приближаться к упругим.

Практически устранение ориентационных деформаций и коробления часто является более актуальной проблемой, чем уменьшение ориентационных напряжений, если последние не достигают опасных величин. Из анализа зависимости максимального прогиба  $U_{2\text{max}}(t)$  рассматриваемой пластины с двумя выделенными зонами

$$U_{2\text{max}}(t) = (3/8)L^2H^{-1}\tilde{U}_1(-H/2, \infty)\psi_2(1 - e^{-\gamma_0 t}) \quad (25)$$

можно получить условие отсутствия коробления (изгиба)

$$\psi_2 = 0 \quad \text{или} \quad q_1q_2 - 1 = 0 \quad (26)$$

При выполнении этого условия ориентационные деформации фактически сводятся к сжатию и растяжению соответствующих зон пластины. Условие, аналогичное (26), можно получить и для пластины с  $n$  зонами, отличающимися степенью и направлением ориентации КМ. Регулируя условия формирования [3], можно изменить поле тензо-

ра ориентации таким образом, чтобы выполнялось условие (26), а изменяя режим охлаждения – избежать нежелательных пиков ориентационных напряжений.

В выражении (25)  $U_{2\max}(t)$  не содержит вязкоупругих параметров КМ  $\alpha$  и  $\beta$ , что следует из исходных предположений о том, что указанные параметры приняты не зависящими от координаты  $x_2$  и температуры  $T$ . Первое предположение, по существу, означает независимость параметров от поля тензора ориентации. Это в какой-то степени оправдано двумя причинами. С одной стороны, параметры  $\alpha$  и  $\beta$  зависят от отношения  $I_\infty/I_0$ , которое в силу изложенных результатов исследования вязкоупругих свойств КМ мало зависят от степени ориентации, а в основном зависят от вязкоупругих свойств полимерной матрицы (рис. 1). С другой стороны, это предположение можно принять, если степень ориентации  $S \ll 1$ , что во многих практических случаях выполняется.

Второе предположение более существенно, так как оно практически означает независимость времени релаксации от температуры. Это приближенно может выполняться для КМ на основе термореактивных полимерных матриц или термопластичных (при твердофазном формовании, когда диапазон изменения температуры невелик).

Исходя из изложенного, можно считать, что во всех случаях, когда выполняются указанные исходные допущения, величины ориентационных деформаций и прогибов достаточно близки к значениям, получаемым из упругого решения. Подтвердени-

ем этому является совпадение результатов расчета ориентационных деформаций и прогибов в упругом приближении для пластины при потере устойчивости с соответствующим экспериментальными значениями [3].

Величины же упругих ориентационных напряжений по сравнению с равновесными вязкоупругими (остаточными) оказываются существенно (до 2–3 раз) завышенными. Усадка в направлении ориентации КМ с дисперсным наполнителем или ненаполненных, в отличие от КМ, армированных анизометричными частицами, как правило, больше усадки в перпендикулярном направлении. Поэтому при прочих равных условиях коробление тел из таких КМ имеет противоположный знак по сравнению с рассматриваемыми КМ.

Рассмотренные методы могут быть применены к анализу ориентационных напряжений и деформаций и в случаях потери устойчивости тела, описанных в работе [3].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974.
2. Малмейстер А.К. // Механика полимеров. 1966. № 2. С.197.
3. Мотавкин А.В., Покровский Е.М. // Высокомолек. соед. А. 2001. Т. 43. № 12. С. 2156.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975.

## Viscoelastic Orientational Stresses and Strains in Polymer Composites

A. V. Motavkin and E. M. Pokrovskii

*Karpov Institute of Physical Chemistry, State Scientific Center of the Russian Federation,  
ul. Vorontsovo pole 10, Moscow, 103064 Russia*

**Abstract**—The results of experimental studies of viscoelastic properties were presented for phenol–formaldehyde polymer matrix and the related composite materials reinforced by short glass fibers with different degrees of orientation of fibers varying from complete disorder to strict orientation in the direction of orientation and in the perpendicular direction. From the experimental data, the integral viscoelastic operators of the compliance tensor were found. Using the above results, defining physical relationships were derived for a polymer composite that was considered an orthotropic body. Based on these grounds, the problem on the distribution of orientational stresses and strains in a plate with a heterogeneous orientation tensor distribution due to a nonsymmetric flow along one of the symmetry axes upon molding was solved by the Laplace integral transformation procedure. The theoretical results obtained for a model body satisfactorily agree with the experimental data.