КОЛЛОИДНЫЙ ЖУРНАЛ, 2000, том 62, № 1, с. 90–96

УДК 532.529:537.361

ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКА МОНОДИСПЕРСНЫХ ЭМУЛЬСИЙ. 1. ОСАЖДЕНИЕ ЭМУЛЬСИИ КАПЕЛЬ С ДВОЙНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СЛОЕМ

© 2000 г. В. Л. Натяганов, И. В. Орешина

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

119899 Москва, Воробьевы горы

Поступила в редакцию 21.04.98 г.

Рассматривается задача о стационарном осаждении монодисперсной эмульсии сферических капель с тонким двойным электрическим слоем (ДЭС) в вязкой электропроводной жидкости в поле силы тяжести. Эмульсия предполагается статистически однородной, объемная концентрация капель $c < 0.2$, а число Рейнольдса $\mathrm{Re} \ll 1$, так что справедливы уравнения гидродинамики в приближении Стокса. Считается, что определяющим фактором для описания системы частиц является "коллективный геометрический эффект", а не электрогидродинамическое взаимодействие двух частиц, когда бинарная функция определяется из других соображений. Используется метод, основанный на анализе электрогидродинамических (ЭГД) процессов в окрестности отдельной капли с помощью аппарата обобщенных функций. Получены выражения для скорости и потенциала оседания эмульсии и, в качестве предельного случая, суспензии твердых частиц.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическому исследованию гидродинамики эмульсий и суспензий сферических частиц посвящено значительное количество оригинальных и обзорных работ [1–10]. В дисперсных системах с ДЭС на поверхности частиц движение жидкости у межфазной поверхности может оказывать решающее влияние на движение всей системы. Существующие в настоящее время теории ДЭС приводят к весьма сложным и громоздким выражениям для распределения заряда и потенциала в двойном слое, что препятствует эффективному применению полученных результатов в гетерогенной электрогидродинамике. В работе выбрана одна из простейших моделей в теории электрокинетических явлений – модель тонкого ДЭС [11–13], которая позволяет не рассматривать процессы внутри ДЭС, а заменить их граничными условиями на поверхности раздела фаз. Последние однозначным образом следуют из трех фундаментальных законов сохранения: массы, количества движения и электрического заряда.

Рассмотрим выбранную модель двойного слоя подробнее. Она включает в себя следующие основные предположения [12].

1. *ДЭС тонкий*, то есть его толщина d много меньше радиуса частицы a: $d/a \ll 1$. Поэтому ДЭС моделируется своеобразным "конденсатором", обкладки которого находятся на молекулярном расстоянии друг от друга (см. рис. 1). Заряд одной из них равен по модулю и противоположен по знаку заряду другой. Таким образом, ДЭС в целом электронейтрален. Форма такого конденсатора совпадает с формой поверхности частицы.

Пусть Q – суммарный заряд адсорбционного и диффузного слоев ДЭС, то есть его внешней обкладки. Тогда $(-Q)$ – заряд внутренней обкладки ДЭС. Соответственно, поверхностная плотность заряда внешней обкладки двойного слоя сферической частицы равна $q = Q/4\pi a^2$, а внутренней обкладки: $q' = -Q / 4\pi a^2 = -q$. Здесь и далее штрихом "'" обозначены величины, относящиеся к области внутри капли.

2. *Вне ДЭС среда считается электронейтральной*, то есть за пределами ДЭС внутри и вне капли объемная плотность заряда равна нулю, а распределение электрического потенциала удовлетворяет уравнению Лапласа

$$r < a\colon \Delta\varphi' = 0, \quad r > a\colon \Delta\varphi = 0.$$

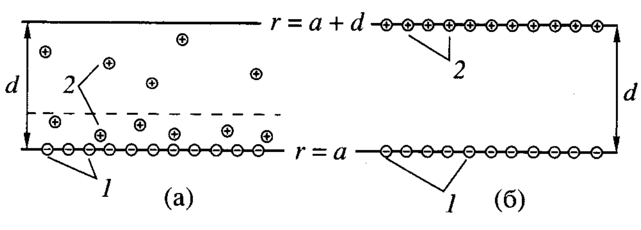

Рис. 1. Модели строения ДЭС: (а) Штерна, (б) Гельмгольца, где *1* – заряды внутренней обкладки ДЭС, *2* – заряды внешней обкладки ДЭС. Пунктиром обозначена условная граница раздела адсорбционной и диффузной частей ДЭС.

3. *ДЭС идеально поляризован.* Это предположение означает запрет на переход зарядов с одной обкладки двойного слоя на другую его обкладку, то есть невозможность "разрядки конденсатора" [12]. Поэтому закон сохранения заряда: $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, где $\mathbf{j}$ – плотность электрического тока, – должен выполняться отдельно в области внутри частицы с прилегающей внутренней обкладкой ДЭС, и отдельно – в области вне ее, включающей внешнюю обкладку ДЭС. Отсюда следуют граничные условия на поверхности капли [12, 14]

$$r = a\colon\ j_n' + \operatorname{div}_\theta \mathbf{j}_\theta' = 0, \quad -j_n + \operatorname{div}_\theta \mathbf{j}_\theta = 0.$$

Индекс n означает нормальную составляющую к поверхности капли, индекс θ – касательную составляющую. В сферической системе координат, связанной с центром частицы, в силу осевой симметрии задачи касательная составляющая имеет только проекцию на ось $\mathbf{e}_\theta$, проекция на ось $\mathbf{e}_\varphi$ равна нулю. Поэтому поверхностная дивергенция равна

$$\operatorname{div}_\theta \mathbf{j}_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta j_\theta)}{\partial\theta}.$$

Так как вне ДЭС жидкость электронейтральна, то j_n может быть только током проводимости. Поэтому последние уравнения принимают вид

$$r = a\colon -\sigma'\frac{\partial\varphi'}{\partial r} + \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta j_\theta')}{\partial\theta} = 0,$$

$$\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta j_\theta)}{\partial\theta} = 0.$$

4. *Поверхностный электрический ток* $\mathbf{j}_\theta$ *считается конвективным.* В настоящее время в литературе можно выделить два основных подхода к его учету. Первый заключается в предположении о существовании повышенной, по сравнению с объемной, поверхностной проводимости двойного слоя $\sigma_{ДЭС}$ и связанного с ней тока проводимости $j_\theta = \sigma_{ДЭС}E_\theta$, причем величина $\sigma_{ДЭС}$ зависит от конкретной модели двойного слоя [13, 15]. Второй способ основывается на предположении, что заряд двойного слоя жидкой капли переносится поверхностным гидродинамическим потоком [12]. Тогда поверхностный ток на внешней обкладке равен $j_\theta = qu_\theta$.

Так как жидкости внутри и вне капли вязкие, то для внутренней обкладки будем иметь $\mathbf{u}_\theta' = \mathbf{u}_\theta$. А так как ее заряд имеет другой знак $q = -q'$, то поверхностный ток здесь будет равен $j_\theta' = -qu_\theta$ (см. рис. 2).

5. *Поверхностные силы на границе раздела фаз с ДЭС.* Если обе фазы являются жидкими проводниками, причем проводимость одной из фаз существенно больше проводимости другой

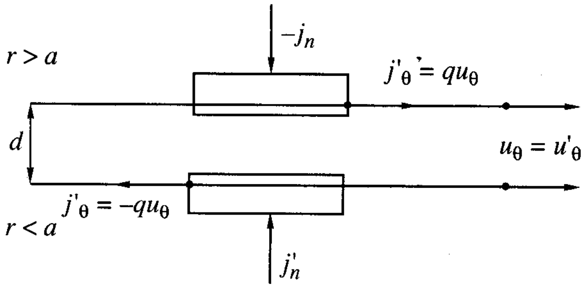

Рис. 2. Схема электрических и гидродинамиеских потоков на границе раздела фаз. Прямоугольниками обозначены бесконечно малые объемы сплошной среды, для которых записывается закон сохранения заряда.

(как в системе "ртутные капли–электролит"), то в балансе поверхностных усилий ролью электрических напряжений Максвелла можно пренебречь по сравнению с вязкими напряжениями и вкладом от электрокапиллярности [12, 14]. В силу предположения о сохранении каплей сферической формы, в балансе напряжений необходимо рассматривать только касательные составляющие тензора вязких напряжений с учетом электрокапиллярного члена $p_{r\theta}^e$.

Считая, что поверхностное натяжение γ связано со скачком потенциала поперек ДЭС термодинамическим соотношением Липпмана–Гельмгольца–Гиббса [11, 12, 14] $\partial\gamma = -q\partial\{\varphi\}$, где фигурные скобки $\{\ldots\}$ означают скачок потенциала поперек ДЭС, имеем

$$p_{r\theta}^e = \nabla_\theta\gamma(\{\varphi\}) = \frac{\partial\gamma}{\partial\{\varphi\}}\nabla_\theta\{\varphi\} = -q\nabla_\theta\{\varphi\}.$$

Здесь ∇_θ – поверхностный градиент: $\nabla_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$.

Далее под частицами, в том числе и жидкими каплями, понимаются частицы таких размеров, что а) для описания процессов вне и внутри них применима модель сплошной среды, и, следовательно, броуновское движение не рассматривается; б) как вне, так и внутри частицы числа Рейнольдса являются малыми: $\mathrm{Re} = aV/\nu \ll 1$; в) поверхностное натяжение достаточно для сохранения сферической формы капель; г) величины порядка $d/a \ll 1$ во всех формулах не учитываются.

В частности, всем перечисленным условиям удовлетворяют капли ртути радиуса 3×10^{-4}–6×10^{-2} см в растворах различных электролитов.

С помощью предложенной модели ДЭС в [12] были решены задачи об электрокапиллярном движении и оседании одиночной капли, электрофорезе и оседании одиночной твердой частицы. Получены распределения электрического потенциала в окрестности частиц и скорости их движения.

1. ОСАЖДЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ

С учетом перечисленных выше предположений задача об ЭГД-осаждении заряженной капли в собственной системе координат с началом в ее центре описывается системой, записанной в безразмерных переменных [12, 14, 16]

$$r<1:\ \Delta\varphi' = 0,\quad \Delta\mathbf{u}' = \nabla p',\quad \operatorname{div}\mathbf{u}' = 0; \tag{1}$$

$$r>1:\ \Delta\varphi = 0,\quad \Delta\mathbf{u} = \nabla p,\quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0; \tag{2}$$

$$r \longrightarrow 0:\ |\nabla\varphi'|<\infty,\quad |\mathbf{u}'|<\infty,\quad |\nabla p'|<\infty;$$

$$r \longrightarrow \infty:\ \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{u}_0 = \mathbf{k},\quad \nabla\varphi \longrightarrow 0;$$

$$r = 1:\ u_r = u_r' = 0,\quad u_\theta = u_\theta' = -v_0\sin\theta, \tag{3}$$

$$\tilde{\sigma}\frac{\partial\varphi'}{\partial r} + 2v_0 q\cos\theta = 0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} + 2v_0 q\cos\theta = 0,$$

$$p_{r\theta} = p'_{r\theta} - q\nabla_\theta\{\varphi\},$$

где расстояния r, скорости u, электрический потенциал φ и плотность q поверхностного заряда одной обкладки ДЭС приведены к безразмерному виду делением соответствующих размерных величин на a, U_0, $U_0\sqrt{\mu/\sigma}$ и $\sqrt{\sigma\mu}$, а давление p вне и внутри капли – делением на $\mu U_0/a$ и на $\mu' U_0/a$. Здесь U_0 – величина скорости однородного потока в бесконечности, $\mathbf{u}_0$ – безразмерная скорость этого потока, v_0 – некоторая, неизвестная пока, величина тангенциальной скорости на поверхности раздела, μ – динамическая вязкость, σ – электропроводность, θ – угол сферической системы координат (между единичным вектором $\mathbf{k}$ полярной оси и радиус-вектором $\mathbf{r}$), $p_{r\theta}$ – тензор вязких напряжений, $\tilde{\mu} = \mu'/\mu$, $\tilde{\sigma} = \sigma'/\sigma$.

В осесимметричном случае решение систем (1) и (2), соответствующее однородному натекающему потоку и граничным условиям (3), может быть представлено через электрический потенциал φ и функцию тока ψ [1] в следующей форме:

$$\varphi = \left(\alpha r + \frac{\beta}{r^2}\right)\cos\theta;$$

$$\psi = \left(A_4 r^4 + A_2 r^2 + A_1 r + \frac{D_1}{r}\right)\sin^2\theta.$$

Однако удобнее решение вне капли искать в виде [8, 17, 18]:

$$\begin{gathered}\mathbf{u} = L(r)\mathbf{u}_0 + G(r)(\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{r})\mathbf{r},\\ p = H(r)(\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{r}),\quad \varphi = S(r)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}),\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$L(r) = 4A_4r^2 + 2A_2 + \frac{A_1}{r} - \frac{D_1}{r^3},$$

$$G(r) = -2A_4 + \frac{A_1}{r^3} + \frac{3D_1}{r^5},$$

$$H(r) = 20A_4 + \frac{2A_1}{r^3},\quad S(r) = \alpha + \frac{\beta}{r^3}.$$

Аналогичным образом представляется решение внутри капли, где

$$\begin{gathered}L' = 4A_4'r^2 + 2A_2',\\ G' = -2A_4',\quad H' = 20A_4',\quad S' = \alpha'\end{gathered} \tag{5}$$

(здесь учтено требование ограниченности физических величин при $r \longrightarrow 0$).

Условиям при $r \longrightarrow \infty$ можно удовлетворить, выбирая $A_4 = 0$, $A_2 = 1/2$, $\alpha = 0$. Остальные коэффициенты находятся из граничных условий при $r = 1$. В частности,

$$\beta = qv_0,\quad A_1 = \frac{2v_0 - 3}{4},$$

где дополнительная величина

$$v_0 = \frac{1}{2\left(1 + \tilde{\mu} + \dfrac{q^2}{3} + \dfrac{2q^2}{3\tilde{\sigma}}\right)} \tag{6}$$

связана с тангенциальной составляющей скорости на поверхности капли соотношением $u_\theta = u_\theta' = -v_0\sin\theta$.

Формальная подстановка полей (4) в систему (2) с точки зрения теории обобщенных функций [19] и учетом соотношения $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = \nabla\operatorname{div}\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u}$ в расширенной области с точкой $r = 0$ приводит к системе [8, 17, 18]

$$\begin{gathered}\Delta\varphi = 4\pi\beta(\mathbf{k}\cdot\nabla\delta(\mathbf{r})),\\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} + \nabla p = 8\pi A_1\mathbf{u}_0\delta(\mathbf{r}),\\ \operatorname{div}\mathbf{u} = -4\pi D_1(\mathbf{u}_0\nabla\delta(\mathbf{r})),\end{gathered} \tag{7}$$

где $\delta(\mathbf{r})$ – трехмерная дельта-функция Дирака.

Таким образом, капля единичного радиуса с ДЭС на поверхности может при $r > 1$ с точки зрения гидродинамики рассматриваться как некоторая комбинация точечной силы и диполя, помещенных в ее центр, а с точки зрения электродинамики – как электрический диполь [13, 20].

2. ВЫВОД ОСРЕДНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим осаждение плоскопареллельного слоя однородной суспензии $N + 1$ ($N \gg 1$) хаотически, но статистически однородно распределенных сферических частиц с ДЭС на поверхности в вязкой несжимаемой жидкости. Среди частиц выбирается пробная и начало системы координат совмещается с ее центром. Остальные частицы системы считаются точечными. Предполагается, что поля скорости, давления и электрического потенциала в окрестности отдельной частицы имеют вид (4), где коэффициенты зависят от объемной концентрации c и заранее неизвестны. В силу линейности задачи обтекание пробной капли в системе N точечных частиц будет описываться системой уравнений типа (7) с измененными правыми частями вида

$$4\pi\sum_{i=1}^{N}\beta_i(\mathbf{k}\cdot\nabla\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i));$$

$$8\pi\mathbf{u}_1\sum_{i=1}^{N}A_{1i}\delta(\boldsymbol{r}-\mathbf{r}_i);$$

$$-4\pi\sum_{i=1}^{N}D_{1i}(\mathbf{u}_1\cdot\nabla\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)),$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения, $\mathbf{r}_i$ соответствуют центрам частиц, а $\mathbf{u}_1$ – безразмерная скорость натекающего на выделенную частицу потока, отнесенная к заранее неизвестной эффективной скорости u_1 в системе точечных частиц. В силу статистической однородности коэффициенты для всех частиц равны $A_{1i} = A_1(c)$, $D_{1i} = D_1(c)$, $\beta_i = \beta(c)$.

Подчеркнем, что с точки зрения электродинамики область, занятая системой частиц, представляет собой однородно поляризованный диэлектрик с одинаково ориентированными диполями [20].

Очевидно, что в системах с большим числом частиц положение отдельной частицы может быть определено лишь с некоторой вероятностью. Поэтому появляется необходимость в нахождении плотностей вероятности или коррелятивных функций. Зная их и используя осреднение, можно перейти от исходных уравнений и граничных условий, описывающих систему жидкость–частицы, к значительно более простым осредненным уравнениям, решение которых позволяет найти нужные величины.

Применяя далее к полученным уравнениям процедуру осреднения по ансамблю возможных конфигураций с помощью бинарной коррелятивной функции $g(r)$ [21], можно для осредненных величин $\langle\mathbf{u}\rangle$, $\langle p\rangle$ и $\langle\varphi\rangle$ в области $r > 1$ получить уравнения [8, 17, 18]

$$\Delta\langle\varphi\rangle = 3c\beta\left[\frac{dg}{dr}+g(2)\delta(r-2)\right](\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}),$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\langle\mathbf{u}\rangle + \nabla\langle p\rangle = 6cA_1g(r)\mathbf{u}_1, \qquad (8)$$

$$\operatorname{div}\langle\mathbf{u}\rangle = -3cD_1\left[\frac{dg}{dr}+g(2)\delta(r-2)\right](\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}),$$

где $g(2)$ – скачок коррелятивной функции при $r = 2$, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности сферы $r = 2$.

Коррелятивная функция такова [21], что $g(r) = 0$ при $0 < r < 2$ (так как две частицы не могут подойти друг к другу ближе, чем на расстояние двух радиусов), при $r = 2$ она имеет разрыв и вне этой области при достаточно больших r экспоненциально быстро стремится к 1 (см. рис. 3). Причем с большой степенью точности для малых c справедливо ее представление

$$g(r) = \begin{cases} 0, & r<2, \\ 1+c\left(8-3r+\dfrac{1}{16}r^3\right), & 2<r<4, \\ 1, & r\geq 4. \end{cases}$$

Осциллирующий характер бинарной коррелятивной функции говорит о существовании зон с наиболее и наименее вероятным расположением частиц. Основную роль здесь играет геометрический эффект, связанный с непроницаемостью шаров и приводящий к послойному их расположению в окрестности произвольно выбранного шара.

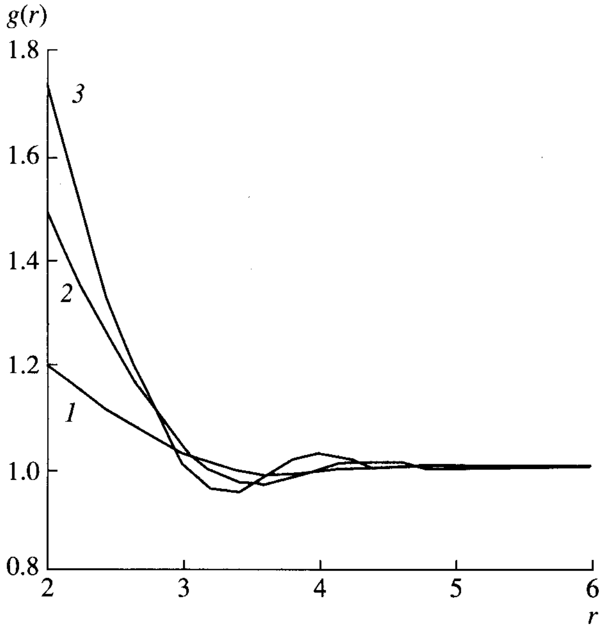

Рис. 3. Коррелятивная функция $g(r)$, численно рассчитанная в [21], при различных значениях объемной концентрации включений c: 0.06 (*1*), 0.12 (*2*), 0.2 (*3*).

Процедура осреднения и вывод уравнений (8) подробно описаны в работах [8, 17], а здесь лишь отметим, что для осредненных величин $\langle\ldots\rangle$ в областях $r < 1$ и $1 < r < 2$ получаются системы уравнений типа (1) и (2) соответственно, и граничные условия при $r = 1$ типа (3), где $\mathbf{u}_0$ и v_0 надо заменить на $\mathbf{u}_1$ и на соответствующую ей скорость жидкости на поверхности пробной капли v_1. В области $r > 2$ осредненные уравнения (8) приводятся к виду

$$\Delta\langle\varphi^*\rangle = 3c\beta\frac{dg}{dr}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}),$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\langle\mathbf{u}^*\rangle + \nabla\langle p^*\rangle = 6cA_1 g(r)\mathbf{u}_1, \tag{9}$$

$$\operatorname{div}\langle\mathbf{u}^*\rangle = -3cD_1\frac{dg}{dr}(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}).$$

Таким образом, все пространство оказывается разделенным на три области: (1) $r < 1$ – частица; (2) $1 < r < 2$ – область, занятая несущей жидкостью суспензии; (3) $r > 2$ – эффективная среда, содержащая точечные особенности. То есть задача о системе частиц сведена к задаче о движении одиночной частицы в некоторой эффективной среде.

При этом на поверхности разрыва плотности числа частиц $r = 2$ возникают следующие граничные условия [8, 17]:

$$\{\langle u_\theta\rangle\} = \{\operatorname{rot}\langle\mathbf{u}\rangle\} = \{\langle p\rangle\} = \{\langle\varphi\rangle\} = 0,$$

$$\{\langle u_r\rangle\} = -3cD_1 g(2)(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}), \tag{10}$$

$$\left\{\frac{\partial\langle\varphi\rangle}{\partial r}\right\} = 3c\beta g(2)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}),$$

где фигурными скобками обозначен скачок $\{\langle\ldots\rangle\} = \langle\ldots^*\rangle - \langle\ldots\rangle$ соответствующих величин.

Для завершения математической постановки задачи необходимо поставить условия вдали от пробной капли

$$r \longrightarrow \infty: \langle\mathbf{u}^*\rangle \longrightarrow \mathbf{u}_1, \quad \nabla\langle\varphi^*\rangle \longrightarrow -3c\beta\mathbf{k}. \tag{11}$$

Условия (11) соответствуют однородному натекающему потоку в системе точечных частиц и осредненному электрическому полю в теории диэлектриков без учета диполь-дипольного взаимодействия [20, 22].

В области $r > 2$ поля $\langle\mathbf{u}^*\rangle$, $\langle p^*\rangle$ и $\langle\varphi^*\rangle$ типа (4)

$$\langle\mathbf{u}^*\rangle = L^*(r)\mathbf{u}_1 + G^*(r)(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{r})\mathbf{r},$$

$$\langle p^*\rangle = H^*(r)(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{r}), \quad \langle\varphi^*\rangle = S^*(r)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$$

приводят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций L^*, G^*, H^* и S^*, общее решение которой имеет вид [8, 17]

$$L^* = 2A_2^* + \frac{A_1^*}{r} - \frac{D_1^*}{r^3} - 3cD_1(g(r)-1) - \int_2^r \frac{R_1(r)}{2r^2}dr - \int_2^r \frac{R_2(r)}{2r^4}dr,$$

$$G^* = \frac{A_1^*}{r^3} + \frac{3D_1^*}{r^5} + \frac{R_1(r)}{2r^3} - \frac{R_2(r)}{2r^5}, \tag{12}$$

$$H^* = 6cA_1 + \frac{2A_1^*}{r^3} + 3cD_1\frac{1}{r}\frac{dg}{dr} + \frac{R_1(r)}{r^3},$$

$$S^* = \alpha^* + \frac{\beta^*}{r^3} + 3c\beta\frac{1}{r}\int_2^r r^2(g(r)-1)dr,$$

где

$$R_1 = \int_2^r r^2 Q(r)dr, \quad R_2 = \int_2^r r^4 Q(r)dr,$$

$$Q(r) = 6cA_1[g(r)-1] - 3cD_1\left(\frac{d^2g}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dg}{dr}\right).$$

В области $r < 1$ поля $\langle\mathbf{u}'\rangle$, $\langle p'\rangle$ и $\langle\varphi'\rangle$ задаются через функции L', G', H' и S' по формулам (5), а в области $1 < r < 2$ – по формулам (4), где $\mathbf{u}_0$ следует заменить на $\mathbf{u}_1$.

Все коэффициенты однозначным образом определяются из граничных условий. С точностью до линейных членов по c, в частности, имеем

$$v_1 = v_0\left[1 + c\left(\frac{19}{4} + v_0\left(4q^2 - \frac{7}{2}\right)\right)\right],$$

$$A_1 = \frac{2v_0 - 3}{4} + \frac{c}{16}[-69 + 88v_0 + 4v_0^2(8q^2 - 7)],$$

$$D_1 = \frac{2 - v_0}{4} + \frac{c}{4}\left[\frac{107}{20} + \frac{67}{5}v_0(8q^2 - 7)\right],$$

$$A_2 = \frac{1}{2} + c\left(\frac{25}{8} - \frac{9}{4}v_0\right),$$

$$\alpha = -4cqv_0, \quad \beta = qv_0\left[1 + \frac{c}{4}(11 + 2v_0(8q^2 - 7))\right].$$

Учет членов порядка c^2 некорректен по ряду причин, из которых укажем лишь две: 1) с точки зрения гидродинамики тогда необходимо учитывать проявление неньютоновских свойств суспензии [9, 10]; 2) с точки зрения электродинамики при выводе условия (11) на $\nabla\langle\varphi^*\rangle$ надо было учитывать диполь-дипольное взаимодействие частиц между собой [22], что существенно усложняет решение задачи.

3. СКОРОСТЬ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ОСАЖДЕНИЯ ЭМУЛЬСИИ

В предыдущем разделе рассматривалась математическая модель суспензии: движение пробной частицы конечного размера в эффективной среде, где все остальные частицы были заменены на точечные мультиполи. Поэтому для получения величин, характеризующих суспензию частиц конечного размера, необходима некоторая обратная процедура перехода от системы точечных частиц к системе частиц конечного радиуса. Этот переход будет осуществлен методом, предложенным в [8].

Сила, действующая на частицу в вязкой жидкости, зависит лишь от коэффициента A_1 и в размерных переменных равна [1]

$$F = -8\pi\mu a A_1 U_1.$$

Но та же сила равна сопротивлению одиночной капли с ДЭС на поверхности

$$F = 2\pi\mu a \frac{2\mu + 3\mu' + \dfrac{q^2}{\sigma} + \dfrac{2q^2}{\sigma'}}{\mu + \mu' + \dfrac{q^2}{3\sigma} + \dfrac{2q^2}{3\sigma'}} U_0.$$

Отсюда следует отношение

$$\frac{U_1}{U_0} = -\frac{1}{4A_1}\frac{2\mu + 3\mu' + \dfrac{q^2}{\sigma} + \dfrac{2q^2}{\sigma'}}{\mu + \mu' + \dfrac{q^2}{3\sigma} + \dfrac{2q^2}{3\sigma'}}.$$

Если U_p – скорость осаждения эмульсии, U_f – скорость движения жидкости в системе отсчета, где среднеобъемная скорость равна нулю

$$cU_p + (1-c)U_f = 0,$$

то введенная выше скорость натекающего потока U_1 в системе точечных частиц связана с относительной скоростью жидкости в системе частиц конечного размера соотношением [8]

$$U_f - U_p = \frac{1 + 3cD_1}{1-c}U_1,$$

откуда

$$U_p = -(1 + 3cD_1)U_1, \quad U_f = \frac{(1 + 3cD_1)}{1-c}U_1.$$

Приведенная скорость осаждения однородной эмульсии сферических капель с ДЭС на поверхности с точностью до линейных членов по c равна

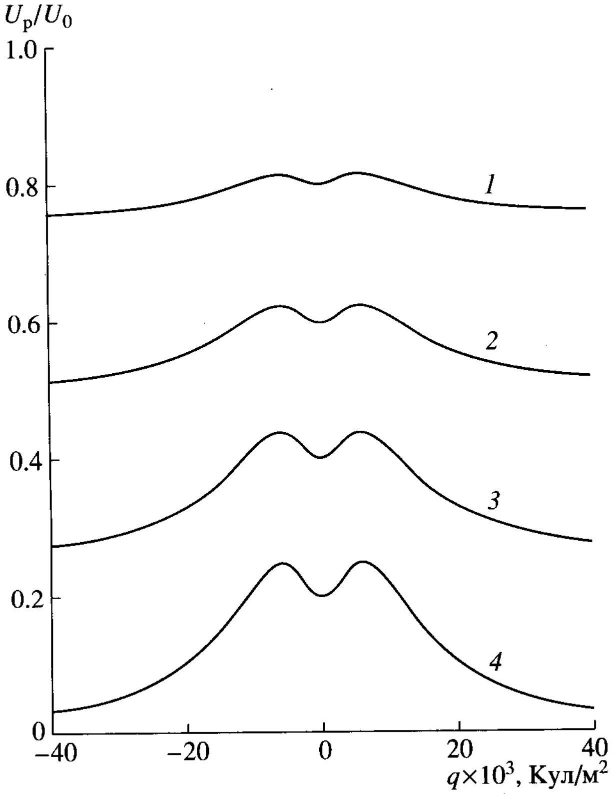

Рис. 4. Приведенная скорость осаждения U_p/U_0 как функция плотности поверхностного заряда q. $c = 0.05$ (*1*), 0.1 (*2*), 0.15 (*3*) и 0.2 (*4*).

$$\frac{U_p}{U_0} = 1 + c\frac{\left(15\xi^2 - 8\mu\xi + \left(1 - \dfrac{2q^2}{\sigma\mu}\right)\mu^2\right)}{(\mu - 3\xi)\xi}, \qquad (13)$$

где $\xi = \mu + \mu' + \dfrac{q^2}{3\sigma} + \dfrac{2q^2}{3\sigma'}$.

В частном случае $q \longrightarrow 0$ формула (13) совпадает с известным результатом [8], а при $q \longrightarrow \infty$ дает скорость осаждения твердых сфер.

На рис. 4 U_p/U_0 представлена как функция q и параметра c при $\mu = 0.48$ Па с, $\mu' = 10^{-3}$ Па с, $\sigma = 0.66 \times 10^2$ (Ом м)$^{-1}$, $\sigma' = 10^6$ (Ом м)$^{-1}$, что соответствует ртутным каплям и раствору KBr в глицерине [12].

Расчет седиментационного потенциала осаждающихся капель по формуле [17]

$$\nabla\varphi_p = \nabla\langle\varphi^*\rangle - c\overline{\nabla\langle\varphi\rangle} + c\overline{\nabla\langle\varphi'\rangle},$$

где черта означает среднее по объему отдельной частицы, приводит в размерных переменных к выражению

$$E = \frac{3\mu q c U_0\left(\dfrac{4}{3} + \dfrac{2\sigma}{3\sigma'}\right)}{2\sigma a\left(\mu + \mu' + \dfrac{q^2}{3\sigma} + \dfrac{2q^2}{3\sigma'}\right)}.$$

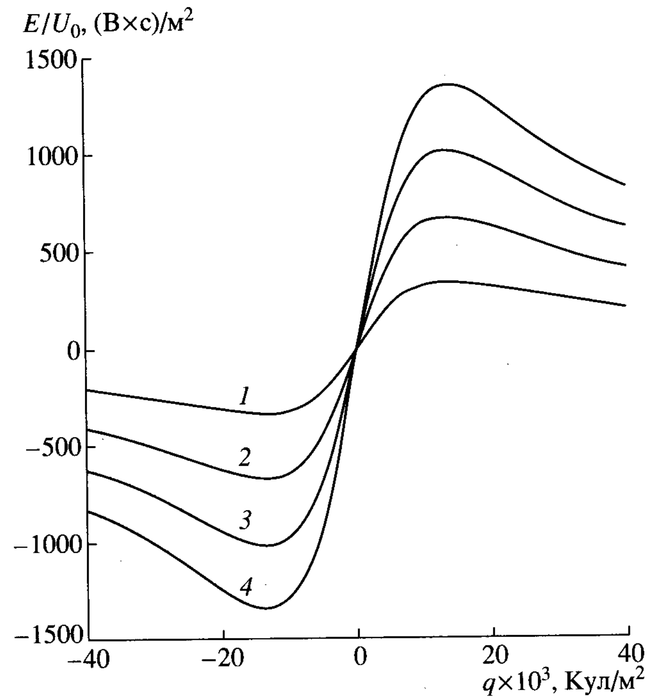

Рис. 5. Приведенный седиментационный потенциал E/U_0 как функция плотности поверхностного заряда q. c = 0.05 (*1*), 0.1 (*2*), 0.15 (*3*) и 0.2 (*4*).

Если пренебречь членами с σ', то получим результат [12] с точностью до множителя 4/3. Это различие может быть объяснено тем, что, во-первых, в данной работе рассматривается система хаотически распределенных частиц, а в [12] – их упорядоченная цепочная структура; кроме того, здесь область, занятая суспензией, является трехмерной (слой), тогда как в [12] она одномерная (столб жидкости), что сказывается на напряженности электрического поля, обусловленного поляризацией [20, 22].

На рис. 5 отношение E/U_0 представлено как функция q и параметра c при вышеуказанных значениях вязкости и электропроводности.

Авторы выражают благодарность за полезное обсуждение работы участникам научно-исследовательских семинаров под руководством академика Е.И. Шемякина на механико-математическом факультете и В.В. Гогосова и В.А. Полянского в НИИ механики МГУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.
2. Новое в зарубежной науке. Сер. Механика. № 22. М., 1980.
3. *Saffman P.G.* // Stud. Appl. Math. 1973. № 52. P. 115.
4. *Cox R.G., Brenner H.* // Chem. Eng. Sci. 1971. V. 26. № 1. P. 65.
5. *Буевич Ю.А., Марков В.Г.* // Прикл. матем. мех. 1973. Т. 6. № 37. С. 1059.
6. *Buyevich Yu.A., Shchelchkova I.N.* // Proc. Aerospace Sci. 1978. V. 18. № 2-A. P. 121.
7. *Чижов В.Е.* // Вестник МГУ. 1976. № 4. С. 67.
8. *Головин А.М., Чижов В.Е.* // Прикл. матем. мех. 1978. Т. 42. № 1. С. 105.
9. *Зинченко А.З.* // Прикл. матем. мех. 1984. Т. 48. № 2. С. 282.
10. *Brady J.F., Durlofsky L.J.* // J. Phys. Fluids. 1988. V. 31. № 4. P. 717.
11. *Дамаскин Б.Б., Петрий О.А.* Электрохимия. М.: Высшая школа, 1987.
12. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959.
13. *Дерягин Б.В., Духин С.С.* Электрофорез. М.: Наука, 1976.
14. *Мелчер Дж.Р.* Магнитная гидродинамика. 1974. № 2. С. 3.
15. *Духин С.С., Шилов В.Н.* Диэлектрические явления и двойной слой в дисперсных системах и полиэлектролитах. Киев: Наукова думка, 1972.
16. *Натяганов В.Л.* Механика деформируемых сред. МГУ. 1985. С. 33.
17. *Головин А.М., Чижов В.Е.* // Вестник МГУ. 1978. № 1. С. 89.
18. *Орешина И.В.* Аналитические, численные и экспериментальные методы в механике. МГУ. 1995. С. 56.
19. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
20. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М., Наука, 1989.
21. *Головин А.М., Чижов В.Е.* // Прикл. матем. мех. 1977. Т. 41. № 6. С. 1138.
22. *Браун В.* Диэлектрики. М.: ИЛ., 1961.